Untersuchungen zu Varianten des Fréchet-Abstands

Theorie und Implementierung

Peter Schäfer

12. Juli 2019

FernUniversität in Hagen

Fakultät für Mathematik und Informatik
Lehrgebiet Theoretische Informatik

Ähnlichkeit

- Ähnlichkeit von geometrischen Objekten (Kurven, Flächen, . . .)
- Handschrifterkennung
- Bewegungsdaten: Autos, Sportler, Touristen, Zugvögel, …
- Erstellung von Landkarten
- Vergleich von Proteinmolekülen

…

Hausdorff-Abstand

- geg.: zwei Mengen $P, Q \subset \mathbb{R}^d$
- finde für jeden Punkt $p \in P$ die kleinste Entfernung zur anderen Menge

$$\inf_{q \in Q} || p - q ||$$

- bilde das Maximum über alle Punkte

$$\bar{\delta}_H(P, Q) = \sup_{p \in P} \inf_{q \in Q} || p - q ||$$

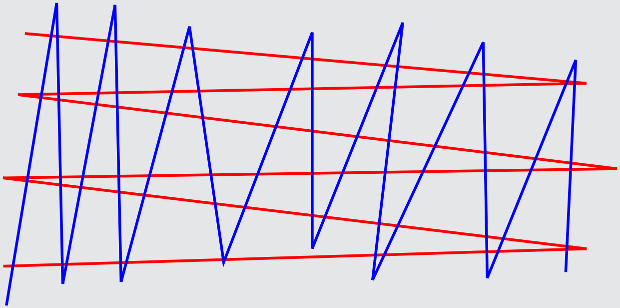
Hausdorff-Abstand

$$\delta_H(P, Q) = \max\{ \bar{\delta}_H(P, Q), \bar{\delta}_H(Q, P) \}$$

Hausdorff-Abstand

- Hausdorff-Abstand klein $\Leftrightarrow$
  zu jedem Punkt gibt es einen nahe gelegenen Punkt der anderen Menge

aber:

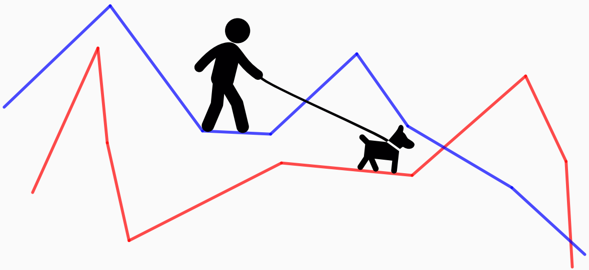


- diese Kurven sind nicht sehr ähnlich ☹

Mann und Hund

- besser: den Verlauf der Kurven beschreiben
- parametrisierte Kurven

$$P, Q\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \text{ stetig}$$



- Mann und Hund bewegen sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit
- nur **vorwärts**

Fréchet-Abstand

- wie lange muss die Leine sein?
- maximale Länge der Leine für einen „Spaziergang“
- Minimum über alle „Spaziergänge“

Fréchet-Abstand

$$\delta_F(P, Q) = \inf_{\sigma,\tau} \sup_{s,t\in[0,1]} ||P(\sigma(t)) - Q(\tau(t))||$$

über **alle** Reparametrisierungen $\sigma, \tau : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$

σ, τ **monoton** und bijektiv

- $s, t :$ Zeit
- $\sigma, \tau :$ unterschiedliche Geschwindigkeiten

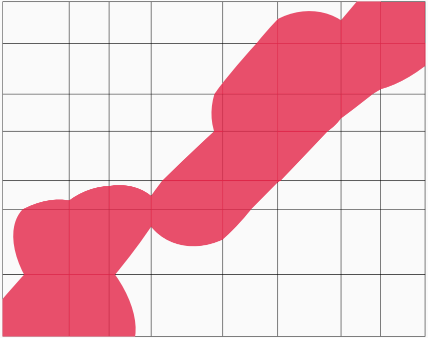
- Fréchet-Abstand für kontinuierliche Kurven
- Varianten: schwach, ¸diskret, homotopisch, …

heute:

1. Polygonzüge
2. einfache Polygone
3. k-Fréchet-Abstand (stückweise)

Fréchet-Abstand für Polygonzüge

Free-Space-Diagramm



- Algorithmus für Polygonzüge: Alt und Godau 1995
- Free-Space-Diagramm

Entscheidungsproblem

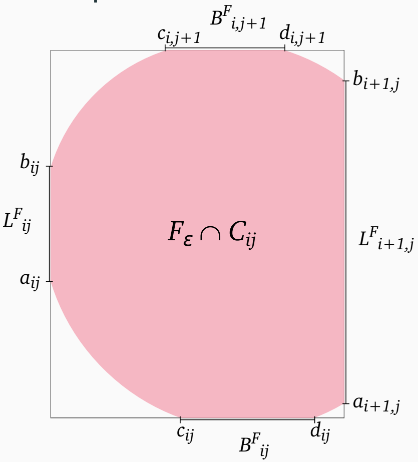
$$\delta_F(P, Q) \;\leq\; \varepsilon\,?$$

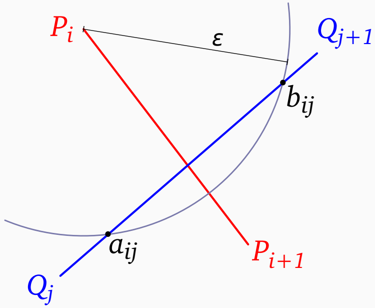
Free-Space

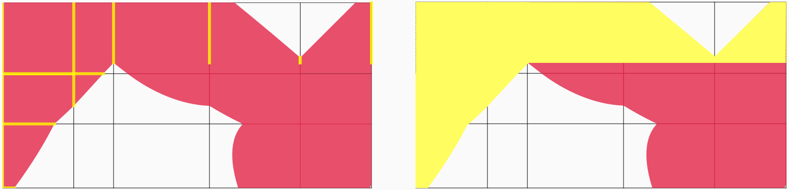
$$F_\varepsilon \;=\; \{\,(s, t):\; ||P(s) - Q(t)|| \leq \varepsilon\,\}$$

Paare von Punkten, deren Abstand $\leq \varepsilon$

- Free-Space-Intervalle = Ränder einer Zelle







- berechne alle Free-Space-Intervalle + erreichbare Intervalle $O(n^2)$

Lösung des Entscheidungsproblems

$\delta_F(P, Q) \leq \varepsilon$

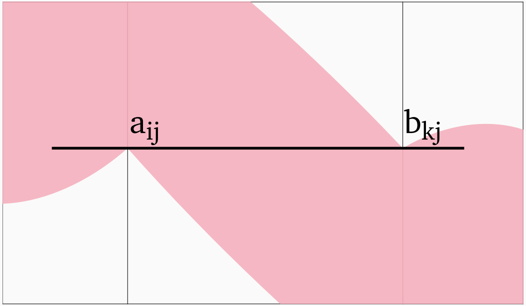
$\Leftrightarrow$ $\exists$ monotoner Pfad von $(0, 0)$ (links unten) nach $(1, 1)$ (rechts oben)

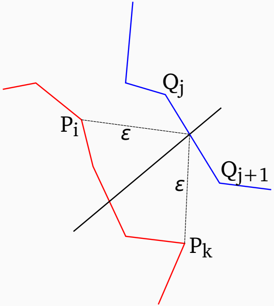
gültiger Pfad

$\Leftrightarrow$ $(1, 1) \in$ erreichbares Intervall

- Werte von ε, an welchen sich die Struktur des Free-Space-Diagramms ändert

1. ein neues Free-Space-Intervall entsteht
2. ein neuer Durchgang entsteht:



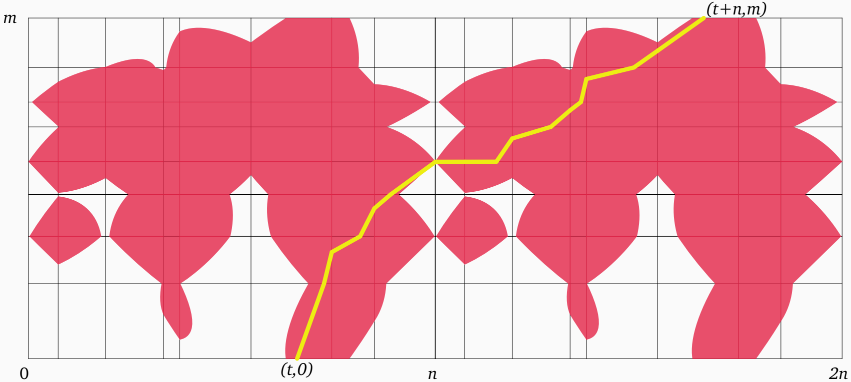


- Liste der kritischen Werte $O(n^3)$
- Binärsuche
- in jedem Schritt: entscheide, ob $\delta_F \leq \varepsilon$? $O(n^2)$

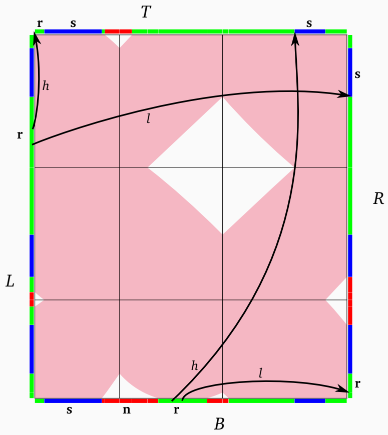
$\Rightarrow$ Ergebnis δ_F
$O(n^3 \log n)$ (Sortieren der kritischen Werte)

- besser: parametrische Suche $O(n^2 \log n)$
- nahezu optimal
- aber schwierig zu implementieren ☹

- Startpunkt nicht bei $(0, 0)$, sondern *irgendwo* bei $(t, 0)$



Erreichbarkeits-Struktur



- markiere Intervalle:
  reachable / not reachable / see-through
- Zeiger auf erreichbare Intervalle
- Abfrage: Intervall erreichbar ? $O(1)$
- Zusammenfügen
- Divide-and-Conquer $O(n^2 \log n)$
- $(t, 0) \longrightarrow (t + n, m)$ erreichbar ?
  Entscheidungsproblem für geschlossene Polygonzüge ✔

Fréchet-Abstand
für einfache Polygone

Fréchet-Abstand für Flächen

- Definition lässt sich auf Flächen $P, Q\colon [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ übertragen

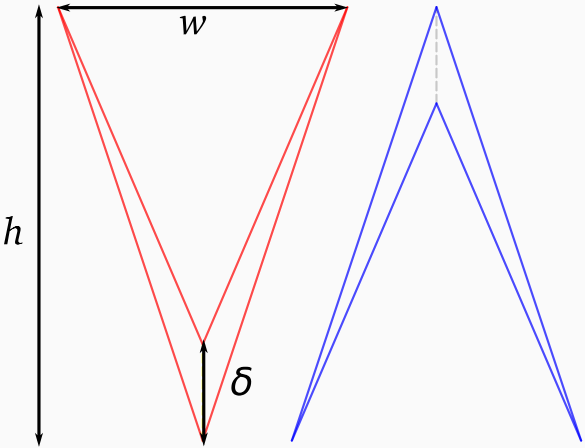
Fréchet-Abstand für Flächen (ohne Überschneidungen)

$$\delta_F(P, Q) \;=\; \inf_{\sigma} \max_{t \in P} ||t - \sigma(t)||$$

über alle orientierungs-erhaltenden Homöomorphismen
$\sigma : P \longrightarrow Q$ (stetig, bijektiv)

- $t \in P$ über alle Punkte des Polygons
- Mann und Hund ?   Monotoner Pfad ?
- berechenbar ??? 😐

Unterschied zur Randkurve



- Randkurve (Polygonzug):
  $\delta_F \longrightarrow 0$

  $\neq$

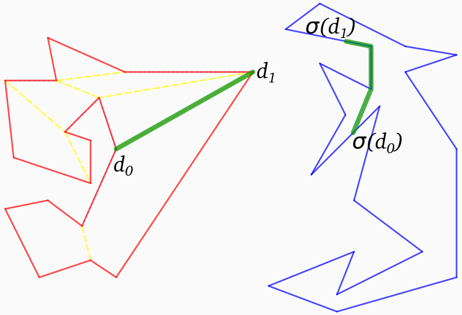
- Polygon: $\delta_F \geq h/2$

Algorithmus für Einfache Polygone

- einfache Polygone P, $Q \subset \mathbb{R}^2$:
  keine Überschneidung, keine Löcher
- Algorithmus von Buchin, Buchin und Wenk 2006

1. Lösung auf der Randkurve ins Innere erweitern
2. konvexe Zerlegung von P
3. Diagonale $\longrightarrow$ kürzester Weg in Q

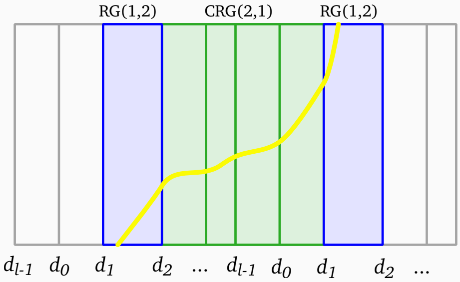
$\delta_F(\text{Diagonale}, \text{Weg}) \leq \varepsilon$



- gültige Abbildungen Diagonale $\longrightarrow$ kürzeste Weg berechnen
- Erreichbarkeits-Strukturen Zusammenfügen (rekursiv)

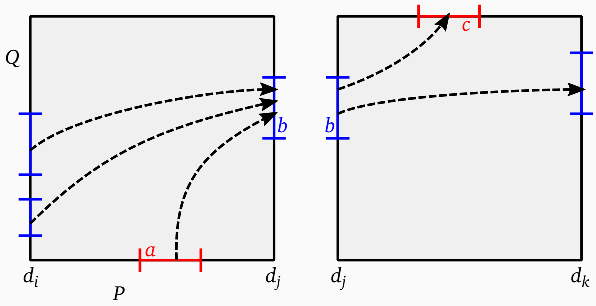
$\Longrightarrow$ Datenstruktur vereinfachen

- Erreichbarkeits-Graph: erreichbare Intervalle



Erreichbarkeits-Graphen Zusammenfügen

- Erreichbarkeits-Graph
  Adjazenzmatrix mit Booleschen Einträgen
- Zusammenfügen
  transitiver Abschluss
  Matrixmultiplikation



Entscheidungsproblem für einfache Polygone

$$O(k \cdot T(n^2))$$

k = Anzahl der konvexen Teile $O(n)$,
$T(N)$ = Matrixmultiplikation $O(N^{2.\dots})$

Berechnung δ_F

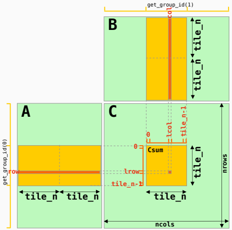
Binärsuche über kritische Werte

$$O(k \cdot T(n^2) \cdot \log n)$$

Boolesche Matrixmultiplikation

Boolesche Matrixmultiplikation

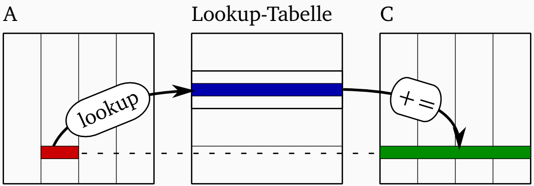
- $A \cdot B = C$



- naiv: drei verschachtelte Schleifen $O(n^3)$
- beste Algorithmen: Strassen, Coppersmith, Winograd, … $O(n^{2.376})$

- **aber:** nur für Ganz- oder Fließkommazahlen ☹
- effiziente Matrixmultiplikation für Boolesche Matrizen ?

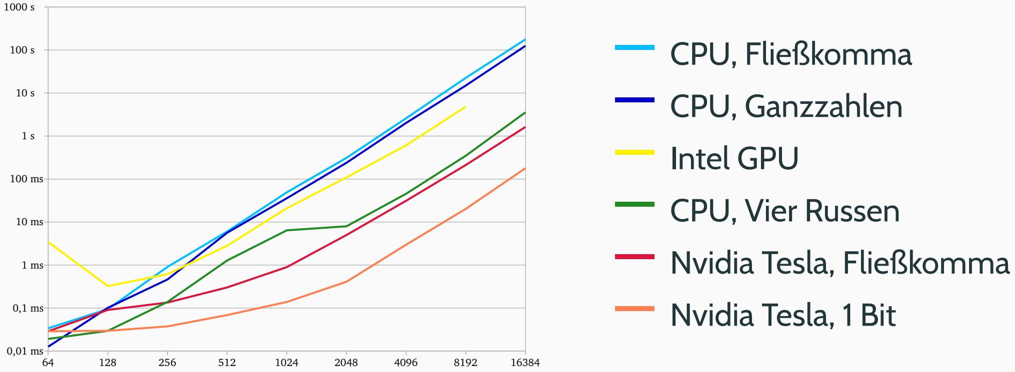
Methode der Vier Russen



- Lookup-Tabelle: k Zeilen von $B \longrightarrow 2^k$ Linearkombinationen
- k Bits von $A \longrightarrow$ Index in Lookup-Tabelle
- Zeile von $C = \sum_1^{n/k}$ lookup
- $k := \log n$

$\Rightarrow O(n^3/\log n)$

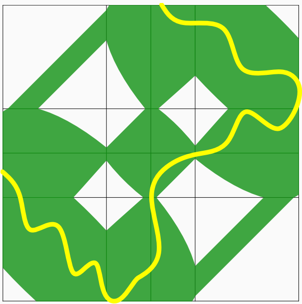
- keine Transponierung ☺
- parallelisierbar ☺


1000 s
100 s
10 s
1 s
100 ms
10 ms
1 ms
0,1 ms
0,01 ms
64
128
256
512
1024
2048
4096
8192
16384
CPU, Fließkomma
CPU, Ganzzahlen
Intel GPU
CPU, Vier Russen
Nvidia Tesla, Fließkomma
Nvidia Tesla, 1 Bit

Der k-Fréchet-Abstand

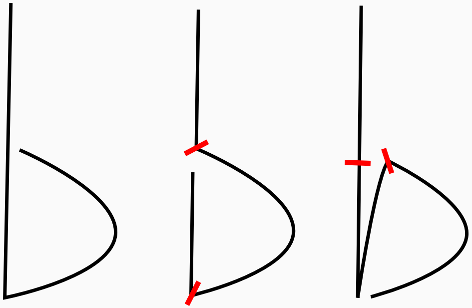
Schwacher Fréchet-Abstand

- Mann und Hund dürfen die Richtung wechseln
- gültiger Pfad nicht monoton



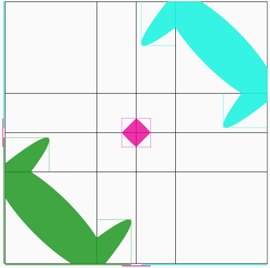
- finde zusammenhängende Komponenten

k-Fréchet-Abstand



- unterschiedlicher Verlauf 😐
- stückweise ähnlich ☺

k-Fréchet-Abstand



- Buchin und Ryvkin 2018
- zerlege P, Q in k Teile
- finde k zusammenhängende Komponenten,
  die beide Wertebereiche des Free-Space-Diagramms abdecken

Vergleich

$$
\begin{aligned}
& \text{Hausdorff-Abstand} \\
\leq\ & k\text{-Fréchet-Abstand} \\
\leq\ & 1\text{- Fréchet-Abstand} \\
=\ & \text{schwacher Fréchet-Abstand} \\
\leq\ & \text{(starker) Fréchet-Abstand}
\end{aligned}
$$

- Entscheidungsproblem für geg. k

1. Free-Space-Diagramm berechnen
2. zusammenhängende Komponenten ermitteln
3. auf die Wertebereiche projizieren
4. wähle k Komponenten aus $O(n^2)$

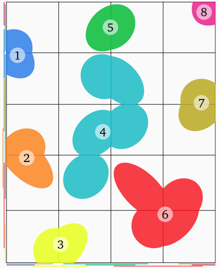
- NP-schwer ☹
- erschöpfende Suche $O(k \cdot n^{2k})$

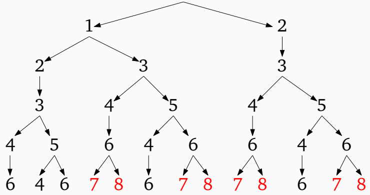
- Fixed Parameter Tractability: beschränke exponentielles Wachstum
- Neighborhood Complexity z

  $\leq z$ Kanten in der ε-Nachbarschaft

$\Rightarrow$ Suchbaum mit Verzweigungsgrad $\leq z$ unabhängig von den Eingabegrößen n und k ☺

- $O(nz + k \cdot z^{2k})$
- $O(nz \log nz + n \cdot z^{k+1})$

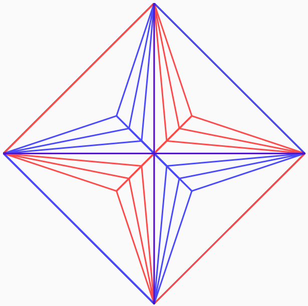


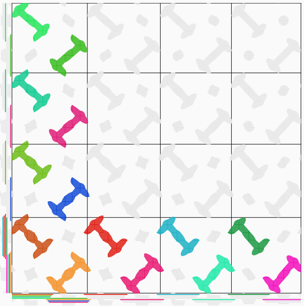


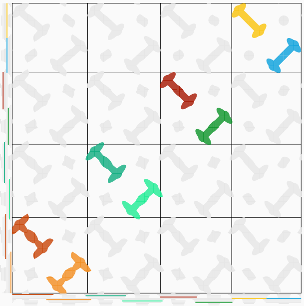
- Greedy
- von links nach rechts: wähle das jeweils größte Intervall
- optimal für je einen Wertebereich
- aber nicht für beide Wertebereiche 😐

- Näherungsfaktor 2

$$k_{greedy} \quad \leq \quad 2 \cdot k_{optimal}$$







Danke für Ihre Aufmerksamkeit

https://hrimfaxi.bitbucket.io/fv